



**УТВЕРЖДЕНО:**  
**Ученым советом Института**  
**сервисных технологий**  
**Протокол №7 от 10.02.2022**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ  
ДИСЦИПЛИНЫ**

***ОУД.08 МАТЕМАТИКА***

**основной профессиональной образовательной программы среднего профессионального  
образования – программы подготовки специалистов среднего звена**

**по специальности: 38.02.07 Банковское дело**

**Квалификация: *Специалист банковского дела***

***год начала подготовки: 2022***

**Разработчики:**

должность	ученая степень и звание, ФИО
<i>преподаватель</i>	<i>Казакова Т.И.</i>

**Методические указания согласованы и одобрены руководителем ШССЗ:**

должность	ученая степень и звание, ФИО
<i>преподаватель</i>	<i>Баранова А.А.</i>



## Содержание

1. Общие положения
2. Тематика и содержание практических занятий
3. Информационное обеспечение обучения



## 1. Общие положения

Методические указания предназначены для обучающихся по ОПОП СПО по специальности 38.02.07 Банковское дело, изучающих учебную дисциплину «Математика», используются на учебных занятиях, которые проводятся под руководством преподавателя, и для выполнения практических работ.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины подразумевает наличие методической литературы с учетом рекомендуемого режима и характера учебной работы, а также с учетом необходимого формата (практические занятия, курсовая работа или лабораторная работа) в зависимости от дисциплины.

## 2. Тематика и содержание практических занятий.

Проведение практических занятий позволяет реализовать следующие дидактические цели и задачи:

- 1) оптимально сочетать лекционные занятия с систематической самостоятельной учебно-познавательной деятельностью студентов, их теоретическую подготовку с практической;
- 2) развивать умения, навыки умственной работы, творческого мышления, умения использовать теоретические знания для решения практических задач;
- 3) Формировать умение использовать справочную, правовую, нормативную документацию и специальную литературу;
- 4) формировать у студентов интерес исследовательской деятельности;
- 5) осуществлять диагностику и контроль знаний студентов по отдельным разделам и темам программы.

### Виды практических занятий

Практическая работа заключается в выполнении студентами, под руководством преподавателя, комплекса учебных заданий направленных на усвоение научно-теоретических основ учебной дисциплины, приобретение практических навыков овладения методами практической работы с применением современных информационных и коммуникационных технологий. Выполнения практической работы студенты производят в письменном виде. Отчет предоставляется преподавателю, ведущему данный предмет. Практические занятия способствуют более глубокому пониманию теоретического материала учебного курса, а также развитию, формированию и становлению различных уровней составляющих профессиональной компетентности студентов.

## Тематика практических занятий:

### Практическое занятие 1.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: **Арифметические действия над числами, нахождение приближенных значений величин и погрешности приближений.**

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Выполнение арифметических действий над числами, сочетая устные и письменные приемы; нахождение приближенных значений величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнение числовых выражений.

### Практическое занятие 2.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: **Действия над комплексными числами**

Цель занятия: Закрепить навыки сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.

Практические навыки: Выполнение действий над комплексными числами.

**Задания:**

### Вариант 1

1) Найдите модуль и аргумент числа  $\frac{8+2i}{5-3i}$

2) Выполните действия:  $\frac{5+2i}{2-5i}$

3) Возведите в степень по формуле Муавра  $(-1 + i\sqrt{3})^9$

4) Извлеките корень  $\sqrt{2 + 2i\sqrt{3}}$

5) Решите уравнение  $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$

*Ответы:*

1)  $\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

2)  $2i$

3)  $512$

3)  $\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i$

5)  $\sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i; -\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i$

### Вариант 2

1) Найдите модуль и аргумент числа  $\frac{5+i}{2+3i}$

2) Выполните действия:  $\frac{4+3i}{3-4i}$



б)  $\sqrt{75^2 - 2 * 75 * 74 + 74^2}$ .

**Вариант 2.**

1. Возвести в степень:

а)  $\left(\frac{5u^{-4}v^3t^{-5}}{2^{-2}u^{-3}v^{-1}t^3}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ;

б)  $\left(\frac{4a^3b^5}{3c^7d^2}\right)^4$ ;

2. Вычислить:

а)  $\sqrt{19^2 + 162 * 19 + 81^2}$  ;

б)  $\sqrt{9} * \sqrt{16} - \sqrt{25} * \sqrt{36}$  .

**Практическое занятие 6.**

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Преобразование выражений содержащих степени и радикалы

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

**Практическое занятие 7.**

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Действия с логарифмами

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Закрепление навыков вычисления логарифмов.

**Задания:**

1. Вычислите:

А. 1)  $\log_2 4$  2)  $\log_4 4$  3)  $\log_2 8$  4)  $\log_2 32$  5)  $\log_2 64$  6)  $\log_{0,5} 4$  7)  $\log_{0,5} 8$

8)  $\log_{0,5} 32$  9)  $\log_{0,5} 0,5$  10)  $\log_{0,5} 0,25$  11)  $6^{\log_6 50}$ .

Б. 1)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_7 3}$  2)  $\log_{0,5} \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$  3)  $4^{\log_4 5 - \log_4 5}$  4)  $16^{0,5\log_4 10+1}$

5)  $\frac{4}{5} (1 + 9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$ .

В. 1)  $27^{\frac{1}{3}\log_3 0,5 - \log_{27} 2}$  2)  $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2\log_5 3}$  3)  $3\log_2 \log_4 16 + \log_{0,5} 2$

4)  $9^{3 - \log_3 2 - \log_{81} 4}$

*Ответы:*

А. 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 5; 5) 6; 6) -2; 10) 2; 11) 50;

Б. 1)  $\frac{9}{7}$ ; 2)  $\frac{25}{4}$ ; 3) 1; 4) 160; 5) 4;

В. 1) 0,25; 2) 144; 3) 2; 4)  $\frac{729}{8}$ ;

1. Сравните по величине  $x$  и  $y$ , если:

1)  $\log_{0,63} x < \log_{0,63} y$ ; 2)  $\log_{3,1} x > \log_{3,1} y$ .

*Ответы:*

1)  $x > y$ ; 2)  $x > y$ .

2. Что больше:

1)  $\log_6 7$  или  $\log_7 6$ ; 2)  $\log_{0,4} 0,5$  или  $\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2}$ ?

*Ответы:*

1)  $\log_7 6 < \log_6 7$ ; 2)  $\log_{0,4} 0,5$ .

3. Найдите  $x$ , если:

1)  $\log_x \frac{1}{8} = -1,5$ ; 2)  $\log_{\frac{1}{16}} \frac{x}{2} = -0,5$ ; 3)  $\log_x \frac{1}{64} = -\frac{2}{3}$ ; 4)  $\log_x 25\sqrt{5} = -\frac{5}{8}$ .

*Ответы:*

1) 4; 2) 8; 3) 512; 4)  $\frac{1}{625}$ .

### Практическое занятие 8.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Преобразование логарифмических выражений, логарифмирование и потенцирование выражений

Цель занятия: Систематизировать и обобщить знания, умения и навыки, связанные с применением методов преобразования логарифмических выражений

Практические навыки: Научиться выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами логарифмов. Развитие умений применять полученные в процессе обучения знания на практике

### Практическое занятие 9.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Логарифмы

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.



Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

#### Практическое занятие 10.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Арифметические операции над функциями.

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Научиться вычислять сумму, произведение и частное двух функций; строить графики функций, заданных различными способами.

#### Практическое занятие 11.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Преобразования графиков функций.

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Выполнение эскизов графиков функций по заданным свойствам.

Построение графиков функции.

#### Практическое занятие 12.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Функции, их свойства и графики

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

#### Практическое занятие 13.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение рациональных и иррациональных уравнений и неравенств.

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Применение различных способов решения иррациональных уравнений.

#### Практическое занятие 14.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение показательных уравнений и неравенств.

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Решение показательных уравнений и неравенств. Системы показательных уравнений. Основные методы решения.

Решить уравнение:

- 1)  $2^x = 2^5$ ;
- 2)  $2^{x+1} = 2^2$ ;
- 3)  $2^x = 8$ ;
- 4)  $2^{x^2-1} = 8$ ;
- 5)  $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ ;

Решить неравенство:

- 1)  $2^x > 2^5$ ;
- 2)  $2^{x+1} \leq 2^2$ ;
- 3)  $2^x > 8$ ;
- 4)  $2^{x^2-1} \geq 8$ ;
- 5)  $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$ ;

6) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x - 2 = 0;$ 7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 0,25^{-2}.$	6) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x - 2 > 0;$ 7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq 0,25^{-2}.$
Решить уравнение: 1) $5^{x+1} + 5^x = 750;$ 2) $5^x - 5^{x-2} = 24;$ 3) $\sqrt{3^{x+2}} = 27;$ 4) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2;$ 5) $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0;$ 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{x+1} - \text{графически}$	Решить неравенство: 1) $5^{x+1} + 5^x < 750;$ 2) $5^x - 5^{x-2} \leq 24;$ 3) $\sqrt{3^{x+2}} \geq 27;$ 4) $3^{2x+5} > 3^{x+2} + 2;$ 5) $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} \leq 0;$ 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \sqrt{x+1} - \text{графически}$

### Практическое занятие 15.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение систем уравнений и неравенств с двумя переменными различными способами".

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Закрепить навыки решения систем и неравенств. Основные методы решения.

### Практическое занятие 16.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Системы логарифмических уравнений. Основные методы решения.

**Задания:**

#### Вариант 1

- 1) Решите уравнение  $\frac{\log_{\frac{2}{2}} x - \log_2 x - 2}{\log_2 x + 1}$
  - 2) Решите неравенство  $\log_3 |2x - 7| < 1$
  - 3) Дано:  $\log_7 2 = m$ . Найдите  $\log_{49} 28$
- Ответы:  
1) 8      2)  $2 < x < 7/2$  или  $7/2 < x < 5$       3)  $(2m+1)/2$

#### Вариант 2

- 1) Решите уравнение  $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$
  - 2) Решите неравенство  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1} > 1$
  - 3) Дано:  $\lg 3 = a, \lg 5 = b$ . Найдите  $\log_{15} 30$
- Ответы:



1)  $\sqrt{3}$       2)  $1/2 < x < 1$       3)  $\frac{a+1}{a+b}$

### Практическое занятие 17.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение систем логарифмических уравнений и неравенств

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Решение систем логарифмических уравнений и неравенств. Системы логарифмических уравнений. Основные методы решения.

### Практическое занятие 18.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Логарифмические уравнения и неравенства.

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

### Практическое занятие 19.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение задач по комбинаторике

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Решение простейших комбинаторных задач.

**Задания:**

**Вариант 1:**

Сократите дроби:

1)  $\frac{n!}{(n+1)!}$ ; 2)  $\frac{(n-2)!}{n!}$ ; 3)  $\frac{2m(2m-1)}{(2m)!}$ .

**Вариант 2:**

Выполните действия:

1)  $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$ ; 2)  $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$ ; 3)  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-3)!}$ .

### Практическое занятие 20.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Биномиальное разложение с использованием треугольника Паскаля

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул, треугольника Паскаля; вычислять коэффициенты бинома Ньютона по формуле и с использованием треугольника Паскаля

### Упражнения

1. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить:

а)  $(b+\sqrt{2})^6$ ; Ответ:  $b^6 + 6\sqrt{2}b^5 + 30b^4 + 40\sqrt{2}b^3 + 60b^2 + 24\sqrt{2}a + 8$ .

б)  $(a-2b)^5$ ; Ответ:  $a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$ .

в)  $\left(a - \frac{1}{a}\right)^{13}$ ; Ответ:  $a^5 - 5a^3 + 10a - \frac{10}{a} + \frac{5}{a^3} - \frac{1}{a^5}$ .

2. Найти пятый и девятый член разложения:

а)  $(\sqrt{z}+z)^{10}$ , б)  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$ . Ответ:  $C_{10}^4 z^7$ ;  $C_{13}^4 x^5$ .

3. Найти два средних члена разложения  $(a^3-ab)^{23}$ . Ответ:  $C_{23}^{12} a^{45} b^{12}$ ;  $-C_{23}^{11} a^{47} b^{11}$ .

4. Найти в биномиальном разложении  $\left(z + \frac{1}{z^3}\right)^{16}$  член, не содержащий  $z$ . (Ответ:  $T_5 = C_{16}^4$ ).

5. Используя треугольник Паскаля найти коэффициенты разложения:

а)  $(a+b)^9$ ,  $(a+b)^{12}$ .

### Практическое занятие 21.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение задач, сводящиеся к использованию формулы Бинома Ньютона

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Уметь применять известные формулы, треугольник Паскаля, коэффициенты бинома Ньютона при решении задач.

Задача.

Доказать, что для любых  $b > 1$  и для любых  $n > 1$  верно *неравенство Бернулли*:

$$b^n > 1 + n(b - 1)$$

Доказательство

Пусть  $b = 1 + t$

Так как  $b > 1$ , то  $1 + t > 1 \Rightarrow t > 0$

Переформулируем требование: Доказать, что  $(1+t)^n > 1 + nt$ , где  $t > 0$ ,  $n > 1$

$$\begin{aligned} (1+t)^n &= C_n^0 \cdot 1^n \cdot t^0 + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot t^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot t^2 + \dots + C_n^m \cdot 1^{n-m} \cdot t^m + \dots + C_n^n \cdot t^n = \\ &= 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 + \dots + C_n^m \cdot t^m + \dots + t^n \end{aligned}$$

Так как  $n > 1 \Rightarrow n \geq 2$ , значит в разложении как минимум три члена разложения, тогда:

$$(1+t)^n \geq 1+nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 > 1+nt$$

Это означает, что  $b^n > 1+n(b-1)$

Ч.т.д.

### Пример 6

Доказать, что  $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{1000} > 30$

### Практическое занятие 22.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение задач на вычисление вероятности события.

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Научиться решать задачи на вычисление вероятности события

### Задания:

#### Вариант 1:

- Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей получится грань с цифрой, кратной трем?
- Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.
- Собрание сочинений из четырех томов нужно поставить на полку по порядку. Вычислите вероятность того, что нужный порядок будет достигнут.

Ответы:

1)

Значения $x_i$	1	2	3	4
Вероятности $p_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2)  $\frac{2}{3}$ ; 3)  $\frac{1}{24}$ ;

#### Вариант 2:

- В лотерее из 100 билетов имеются 5 выигрышей по 3 руб., 10 выигрышей по 2 руб. и 55 выигрышей по 1 руб. Какова вероятность на один купленный билет выиграть не менее двух рублей?
- На 6 карточках было написано слово «победа». Их рассыпали и взяли только 4 карточки. Какова вероятность того, что получится слово «обед»?
- В ящике находятся 4 детали. Каждую деталь осматривают, выбирая стандартную. Если обнаружится дефект, то вынимают следующую. Найдите математическое



ожидание для номера стандартной детали, если вероятность дефекта каждой равна 0,3.

Ответы:

1) 0,15; 2)  $\frac{1}{360}$ ; 3)  $\frac{1}{3846}$ .

### **Практическое занятие 23.**

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Научиться решать задачи на применение теорем сложения и умножения вероятностей события.

### **Практическое занятие 24.**

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Решение прикладных задач

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Научиться решать прикладные задачи на вычисление вероятности события.

### **Практическое занятие 25.**

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Комбинаторика и теория вероятности.

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

### **Практическое занятие 26.**

Вид практического занятия: Урок формирования умений и навыков..

Тема и содержание занятия: Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Научиться выводить формулы зависимости между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла (числа); обучиться применению этих формул для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса числа по заданному значению одного из них.

### **Практическое занятие 27.**

Вид практического занятия: Урок формирования умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Тригонометрические тождества

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Научиться научить применять полученные ранее знания, умения и навыки для упрощения выражений и доказательства тригонометрических тождеств.

### **Практическое занятие 28.**

Вид практического занятия: Урок формирования умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Преобразование тригонометрических выражений

Цель занятия: Систематизировать и обобщить знания о тригонометрических выражениях, опираясь на числовые окружности;

Практические навыки: Научиться научить применять полученные ранее знания, умения и навыки для упрощения тригонометрических выражений и доказательства тригонометрических тождеств.

I вариант	II вариант
<p>A1. Вычислите:</p> $\cos 60^\circ + 2\sin 30^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ$ <p>1) 1 2) -1 3) -2 4) 2</p>	<p>A1. Вычислите:</p> $\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$ <p>1) 3 2) 4 3) -4 4) 2</p>
<p>A2. Вычислите:</p> $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6}$ <p>1) 4 2) 3 3) 2 4) 1</p>	<p>A2. Вычислите:</p> $\cos \frac{\pi}{3} + 2\sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ <p>1) 1 2) 3 3) 2 4) -2</p>
<p>A3. Найдите значение выражения: <math>14\sin^2 x - 3</math>, если <math>\cos^2 x = 0,7</math></p> <p>1) 2, 2 2) -1, 2 3) 1, 2 4) -2, 2</p>	<p>A3. Вычислите <math>\cos x</math>, если <math>\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} &lt; x &lt; \pi</math> <math>\sin x = \frac{3}{5}</math></p> <p>1) -0,6 2) -0,5 3) 0,6 4) 1,5</p>
<p>A4. Вычислите: <math>\sin 75^\circ</math></p> $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} + 1)$ <p>1) <math>\sqrt{2}</math> 2) <math>\frac{\sqrt{2}}{4}</math> 3) <math>\sqrt{3}</math> 4) <math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></p>	<p>A4. Вычислите: <math>\frac{10\sin 30^\circ \cos 30^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}</math></p> <p>1) 6 2) 8 3) 4 4) 5</p>
<p>B1. Вычислите:</p> $96\sqrt{3} \cdot \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$	<p>B1. Вычислите:</p> $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$

### Практическое занятие 29.

Вид практического занятия: Урок формирования умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Цель занятия: Разработать и закрепить вывод формул для косинуса и синуса суммы и разности аргументов;

Практические навыки: Формировать умения в применении нового и ранее изученного материала, при выполнении различных преобразований тригонометрических выражений;

Воспитание навыков самоконтроля и взаимоконтроля.

### Практическое занятие 30.

Вид практического занятия: Урок формирования умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Преобразование графиков тригонометрических функций

Цель занятия: Повторить правила преобразований, построить и описать основные свойства тригонометрических функций, познакомиться с гармонической функцией.

Практические навыки: Закрепить навыки и умения преобразования графиков.  
Рассмотреть связь между алгеброй и физикой на примере гармонической функции.

### Задания.

Постройте график функции:

$$y = 2 \sin \left( 3x - \frac{3\pi}{4} \right), \quad y = -3 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right), \quad y = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right), \quad y = -\frac{3}{2} \cos \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$$

### Практическое занятие 31.

Вид практического занятия: Урок совершенствования знаний, умений и навыков решения тригонометрических уравнений.

Тема и содержание занятия: Решение тригонометрических уравнений методом подстановки и разложения на множители

Цель занятия: Сформировать у учащихся умения и закрепить навыки решения тригонометрических уравнений; сформировать умения классифицировать по методам решений, применять эти методы в новой ситуации.

Практические навыки: Закрепить навыки и умения решения тригонометрических уравнений

### Задания

Решить простейшие уравнения:

1.  $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ ;
2.  $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$ ;
3.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + 3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} x = 4$ ;
4.  $(\sin x - 1/3)(\cos x + 2/5) = 0$ ;
5.  $2 \sin x * \cos 5x - \cos 5x = 0$ ;
6.  $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ ;
7.  $\sin 2x + \cos 2x = 0$ .

Решить тригонометрические уравнения, приводящиеся к предыдущему типу, по формулам:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{ctg} x * \operatorname{tg} x = 1;$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x;$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1;$$

Уравнение  $\sin x + \cos x = 1$  можно решить несколькими способами, рассмотрим четыре способа решения уравнения

**Способ 1.** Введение вспомогательного угла

$\sin x + \cos x = 1$  Разделив обе части уравнения почленно на  $\sqrt{2}$ , получим  $1/\sqrt{2} \sin x + 1/\sqrt{2} \cos x = 1/\sqrt{2}$ ;

$$\cos \pi/4 \sin x + \sin \pi/4 \cos x; \sin (x + \pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$x + \pi/4 = (-1)^n \arcsin \sqrt{2}/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\pi/4 + (-1)^n \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

Ответ:  $x = -\pi/4 + (-1)^n \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,

**Способ 2.** Сведение к однородному уравнению.

Выразим  $\sin x, \cos x, 1$  через функции половинного аргумента:

$$2 \sin x/2 \cos x/2 + \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2 = \sin^2 x/2 + \cos^2 x/2,$$

$2 \sin x/2 \cos x/2 - 2 \sin^2 x/2 = 0$ . Разделив обе части уравнения почленно на  $\cos^2 x/2 \neq 0$ , получим  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x = 0$ ,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}x (1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}x) = 0, \operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 0 \text{ или } \operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 1,$$

Если  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 0, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , если  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 1, x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**Способ 3.** Преобразование суммы в произведение.

Выразим  $\cos x$  через  $\sin(\pi/2 - x)$ , получим

$$2 \sin \pi/4 \cos(x - \pi/4) = 1, \sqrt{2} \cos(x - \pi/4) = 1,$$

$$\cos(x - \pi/4) = \sqrt{2}/2, x - \pi/4 = \pm \arccos \sqrt{2}/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/4 \pm \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**Способ 4.** Универсальная тригонометрическая подстановка.

Выразим  $\sin x, \cos x$  через  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ ,

$$\text{получим } 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x,$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x = 0, \operatorname{tg} \frac{1}{2}x (1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}x) = 0, \operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 0 \text{ или } \operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 1,$$

Если  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 0, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , если  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 1, x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

### **Практическое занятие 32.**

Вид практического занятия: Урок совершенствования знаний, умений и навыков решения систем тригонометрических уравнений.

Тема и содержание занятия: Решение простейших систем тригонометрических уравнений

Цель занятия: Сформировать у учащихся умения и закрепить навыки решения простейших систем тригонометрических уравнений.

Практические навыки: Закрепить навыки и умения решения простейших систем тригонометрических уравнений

### **Практическое занятие 33.**

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Тригонометрические формулы и уравнения.

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

### Практическое занятие 34.

Вид практического занятия: Урок совершенствования знаний, умений и навыков вычисление пределов числовой последовательности.

Тема и содержание занятия: Вычисление предела числовой последовательности.

Цель занятия: Закрепление теоретически х знаний.

Практические навыки: Научиться вычислять предел заданной последовательности.

#### Задания

Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если:

а)  $x_n = \frac{-15}{n^2}$ ;

б)  $x_n = \frac{3}{\sqrt{n}}$ ;

в)  $x_n = \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{5}{n^3} + \frac{13}{n^4}$ ;

г)  $x_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} - 4 + \frac{7}{n^2}$ ;

д)  $x_n = \frac{3n+1}{n+2}$ ;

е)  $x_n = \frac{2n+1}{3n-1}$ ;

ж)  $x_n = 7 \cdot 3^{-n}$ ;

з)  $x_n = \frac{4}{3^{n+1}}$ ;

и)  $x_n = \frac{3-n^2}{n^2}$ ;

к)  $x_n = \frac{3n-4-2n^2}{n^2}$ ;

л)  $x_n = \frac{(3n-2)(2n+3)}{n^2}$ ;

м)  $x_n = \frac{(1-2n)(1+n)}{(n+2)^2}$ ;

н)  $x_n = \frac{(1-n)(n^2+1)+n^3}{n^2+2n}$ ;

о)  $x_n = \frac{n(7-n^2)+n^3-3n-1}{(n+1)(n+2)+(2n^2+1)}$ .

### Практическое занятие 35.

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Вычисление предела функции.

Цель занятия: научиться вычислять пределы функции;

систематизировать полученные знания, активизировать самоконтроль, взаимоконтроль.

Практические навыки: Научиться применять полученные знания для вычисления пределов

Развить математическое мышление.

Вычислим предел:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3}{x-1}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \times 3 + 3}{3-1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9}{2} = 4,5.$$

Подставляем вместо  $x - 3$ .

Заметим, что предел числа равен самому числу.

а)  $\lim_{x \rightarrow 6} (3x^2 - 4x + 5)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-5}{x+1}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x + 2$ .

Примеры: вычислите пределы

### Практическое занятие 36.

Вид практического занятия: Урок совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Вычисление производных элементарных функций

Цель занятия: отработать практические умения и навыки вычисления производных функций в случаях, не требующих трудоемких выкладок.

Практические навыки: Вычисление производных.

### Практическое занятие 37.

Вид практического занятия: Урок совершенствования знаний, умений и навыков

Тема и содержание занятия: Производная сложной функции

Цель занятия: формирование умения находить по правилу производную сложной функции; отработка алгоритма применения правила нахождения производной сложной функции при решении примеров.

Практические навыки: находить по правилу производную сложной функции, использовать это правило при решении примеров.

Найти производные функций. (А., В., С. – ответы)

№	Задание	Ответы		
		А	В	С
1	$y = (x+1)^{12}$	$12(x+1)$	$12(x+1)^{11}$	$12(x+1)^{13}$
2	$y = (4x-3)^5$	$20(4x-3)^4$	$5(4x-3)^4$	$20x(4x-3)^4$
3	$y = (x^7 - x^5 - 3)^5$	$5(x^7 - x^5 - 3)^4$	$5(x^7 - x^5 - 3)^4 \cdot (7x^6 - 5x^4)$	$5(7x^6 - 5x^4)$
4	$y = 3\cos(5x+6)$	$-3\sin(5x+6)$	$-15\sin(5x+6)$	$15\sin(5x+6)$
5	$y = \sqrt{x^2-2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x^2-2}}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$

#### Вариант 2.

Найти производные функций. (А., В., С. – ответы)

№	Задание	Ответы		
		А	В	С
1	$y = (x+4)^6$	$6(x+4)^5$	$6(x+4)$	$x+4$
2	$y = (3x-2)^3$	$3(3x-2)^2$	$3(3x-2)^2$	$9(3x-2)^2$
3	$y = (x^5 + x^3 + 1)^6$	$6(x^5 + x^3 + 1)^5 \cdot (5x^4 + 3x^2)$	$6(x^5 + x^3 + 1)^5$	$5x^4 + 3x^2$
4	$y = 2\sin(3x-4)$	$2\cos(3x-4)$	$6\cos(3x-4)$	$\cos(3x-4)$
5	$y = \sqrt{x^2+8}$	$\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

### Практическое занятие 38.

Вид практического занятия: Урок совершенствования знаний, умений и навыков

Тема и содержание занятия: Вычисление значений производных в заданных точках

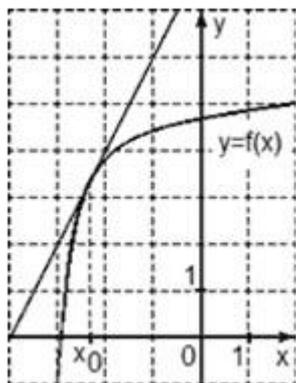
Цель занятия: сформировать представление о геометрическом смысле производной, умения составлять уравнение касательной к графику функции в заданной точке, находить угловой коэффициент касательной к графику функции, угол между касательной к графику и осью  $Ox$

Практические навыки: Научиться составлять уравнение касательной к графику функции в заданной точке, находить угловой коэффициент касательной к графику функции, угол между касательной к графику и осью  $Ox$

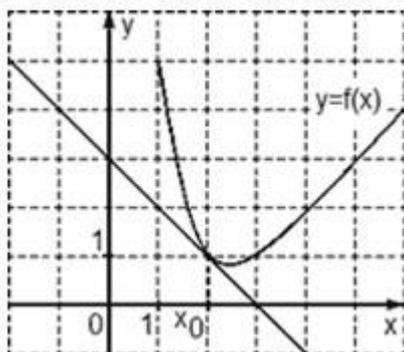
#### Задания.

##### Задача 1.

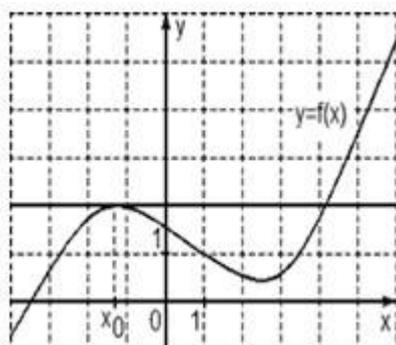
На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$



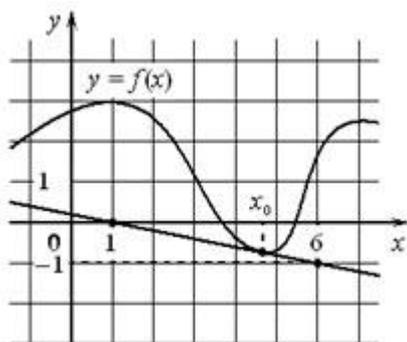
**Задача 2.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**Задача 3.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**Задача 4.** На рисунке изображены график функции  $y=f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**Ответы.** Задача 1. 2. Задача 2. -1 Задача 3. 0 Задача 4. 0,2 .

### Практическое занятие 39.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Производная функции. Применение производных

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

### Практическое занятие 40.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков

Тема и содержание занятия: Нахождение первообразных простейших функций

Цель занятия: закрепить понятие первообразной, находить первообразные функции разного уровня.

Практические навыки: Научиться находить первообразные функции в простейших случаях, проверять, является ли первообразная для функции на данном промежутке времени.

1 Найти первообразные функций:

а)  $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ ;

б)  $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt[3]{u}} + u \cdot \sqrt{u}$ ;

в)  $h(x) = (x^3 + 1)^2$ ;

г)  $v(x) = \cos(5x - 1)$ ;

### Решение

Для нахождения первообразных функций воспользуемся таблицей первообразных.

а)  $\frac{x^5}{5}$  – первообразная  $x^4$ ;  $\frac{x^3}{3} \rightarrow x^2$ ;  $\frac{x^2}{2} \rightarrow x$ ;  $x \rightarrow 1$ . По правилу 1 нахождения

первообразных  $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$  – первообразная функции

$$f(x) = x^4 - x^2 + x - 1.$$

б) Запишем функцию  $\varphi(u)$  в виде  $u^{\frac{1}{3}} + u^{\frac{3}{2}}$ , тогда  $\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}$  – первообразная  $u^{\frac{1}{3}}$ ,  $\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}$  –

первообразная  $u^{\frac{3}{2}}$ . Отсюда  $\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C$  – первообразная  $\varphi(u)$ .

в)  $h(x) = (x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$ . По правилам 1 и 2 нахождения первообразных

$\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^4 + x + C$  – первообразная  $h(x)$ .

г)  $v(x) = \cos(5x - 1)$ .

– первообразная  $\cos x$ , отсюда  $\frac{1}{5}\sin(5x - 1) + C$  – первообразная  $v(x)$ .

2 Повторите формулы первообразных функций и правила нахождения первообразных.

**Задания:**

1 Применяя правило 1, найдите первообразную функции  $y = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ .

2 Применяя правило 1 и 2, найдите первообразную функции:

а)  $5x^3 - 3x\sqrt{x}$ ; б)  $5\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$ .

Применяя правило 3, найдите первообразную функции:

а)  $(ax + b)^2$ ,  $a \neq -1$ ; б)  $\sin(ax + b)$ ; в)  $\frac{1}{\cos^2(ax + b)}$ .

4 Найдите первообразную функции:

а)  $x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ ; б)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(x^4 + 5\sqrt[3]{x} + 6)$ ;

г)  $\frac{1}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})^2$ ; д)  $5\sin x - \sqrt{2}\cos x$ ; е)  $a^3 - 2\sin x$ .

### Практическое занятие 41

Вид практического занятия: Решение задач.

Тема и содержание занятия: Вычисление неопределенных и определенных интегралов

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Интегрирование простейших функций. Интегрирование функций разными способами. Вычисление определенных интегралов простейших функций. Вычисление площадей плоских фигур.

1.  $\int \frac{dp}{4-p^2}$  (табличное интегрирование)
2.  $\int x(3x^2-1)^{2009} dx$  (интегрирование заменой переменной)
3.  $\int \frac{e^{-x} dx}{1-e^{-x}}$  (интегрирование заменой переменной)
4.  $\int e^x \sin x dx$  (интегрирование по частям)
5.  $\int \sin 2x \cdot \sin 5x dx$  (интегрирование тригонометрических функций)
6.  $\int \frac{\sin^3 2x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$  (интегрирование тригонометрических функций)
7.  $\int \frac{x^4}{1-x} dx$  (интегрирование рациональных дробей)

Вычислите интегралы и из таблицы выберите букву, соответствующую полученному ответу в примере. Из букв составьте слово, определяющее математическое понятие.

0	$\sqrt{2}-2$	2	$-\frac{2}{3}$	0,5	$\frac{2}{3}$
и	к	з	в	а	н

$$1. \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \text{ (буква "н")}$$

$$2. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin x dx = -2 \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = -2 \left( \cos 0 - \cos \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= -2 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + \sqrt{2} \text{ (буква "к")}$$

$$3. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2} (\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \text{ (буква "а")}$$

$$4. \int_0^{\ln 6} \frac{e^x dx}{\sqrt{3+e^x}} = \int_0^{\ln 6} (3+e^x)^{-\frac{1}{2}} d(3+e^x) = \frac{(3+e^x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\ln 6} = 2\sqrt{3+e^x} \Big|_0^{\ln 6} =$$

$$= 2(\sqrt{3 + e^{\ln 6}} - \sqrt{3 + e^0}) = 2(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = 2 \text{ (буква "з")}$$

Ответ: "знак"

#### Практическое занятие 42.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Интегральное исчисление

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

#### Практическое занятие 43.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков

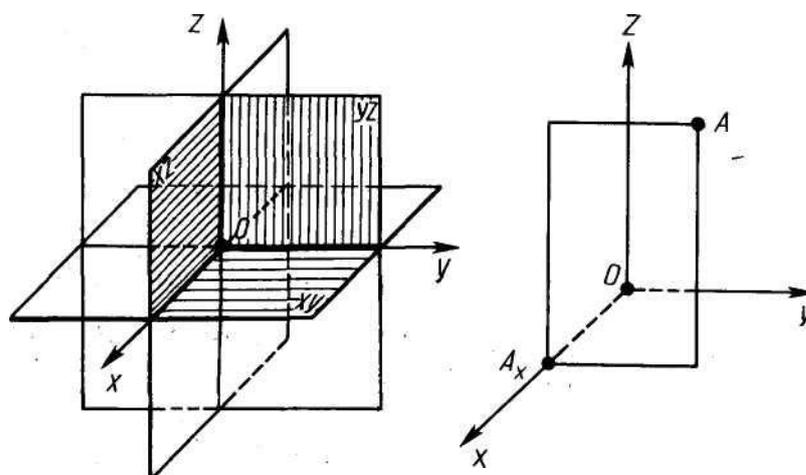
Тема и содержание занятия: Введение декартовых координат в пространстве

Цель занятия: Закрепить понятие системы координат и координаты точки в пространстве;

Практические навыки: Научиться применять формулу расстояния в координатах и формулу координат середины отрезка.

Повторить основные понятия декартовых координат, формулу расстояния между точками, формулы координат середины отрезка на плоскости, и попытаться учащимся самим сформулировать основные понятия и формулы в пространстве)

На плоскости	В пространстве
Определение.	Определение.
2 оси, ОУ- ось ординат, ОХ- ось абсцисс	3 оси, ОХ - ось абсцисс, ОУ – ось ординат, ОZ - ось аппликат.
ОХ перпендикулярна ОУ	ОХ перпендикулярна ОУ, ОХ перпендикулярна ОZ , ОУ перпендикулярна ОZ.
(О;О)	(О;О;О)
Направление, единичный отрезок	Направление, единичный отрезок
Расстояние между точками. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	Расстояние между точками. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Координаты середины отрезка. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	Координаты середины отрезка. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}$



Найти длину отрезка:

1.  $A(1;2;3)$  и  $B(-1; 0; 5)$
2.  $A(1;2;3)$  и  $B(x; 2; -3)$

Найдите координаты точки  $M$  - середины отрезка  
 $A(2;3;2)$ ,  $B(0;2;4)$  и  $C(4;1;0)$

- $AC$
- $AB$
- Является ли точка  $B$  серединой отрезка  $AC$ ?

#### Практическое занятие 44.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков

Тема и содержание занятия: Координаты и векторы. Решение задач на вектора

Цель занятия: Научиться решать задачи по данной теме.

Практические навыки: развить пространственное воображение и логическое мышление.

Решение задач по готовым чертежам

#### Практическое занятие 45.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Векторы.

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

#### Практическое занятие 46.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве Цель занятия: повторение и обобщение изученного материала.

Практические навыки: Формировать навык чтения чертежей, пространственных конфигураций к задачам, развивать пространственное воображение учащихся при решении геометрических задач.



#### **Практическое занятие 47.**

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Перпендикуляр и наклонная

Цель занятия: Повторение и обобщение изученного материала. Применить полученные данные при решении простейших задач.

Практические навыки: Формировать навык чтения чертежей, пространственных конфигураций к задачам, развивать пространственное воображение учащихся при решении геометрических задач.

Точка  $A$  не лежит в плоскости, а точка  $E$  - принадлежит этой плоскости.  $AE = 13$ , проекция этого отрезка на плоскость равна 5. Каково расстояние от точки  $A$  до данной плоскости?

#### **Практическое занятие 48.**

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Решение задач на нахождение двугранных и соответствующих им линейных углов.

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Сформировать конструктивный навык нахождения угла между плоскостями

1.  $PABC$  – пирамида; угол  $ACB$  равен  $90^\circ$ , прямая  $PB$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Доказать, что угол  $PCB$  – линейный угол двугранного угла с

2.  $PABC$  - пирамида;  $AB = BC$ ,  $D$  – середина отрезка  $AC$ , прямая  $PB$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Доказать, что угол  $PDB$  – линейный угол двугранного угла с ребром  $AC$ .

3.  $PABCD$  – пирамида; прямая  $PB$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ ,  $BK$  перпендикулярна  $DC$ . Доказать, что угол  $PKB$  – линейный угол двугранного угла с ребром  $CD$ .

Задачи на построение линейного угла .

1. Построить линейный угол двугранного угла с ребром  $AC$ , если в пирамиде  $PABC$  грань  $ABC$  – правильный треугольник,  $O$  – точка пересечения медиан, прямая  $PO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$

2. Дан ромб  $ABCD$ . Прямая  $PC$  перпендикулярна плоскости  $ABCD$ . Построить линейный угол двугранного угла с ребром  $BD$  и линейный угол двугранного угла с ребром  $AD$ .

#### **Практическое занятие 49.**

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Прямые и плоскости в пространстве

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

### Практическое занятие 50.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Призма. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб. Решение задач на нахождение элементов призмы.

Цель занятия: Закрепление теоретических знаний.

Практические навыки: Решение задач на нахождение элементов призмы. формировать умение учащихся применять теоретический материал к решению задач;

развивать пространственное и конструктивное мышление

Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основанием 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямая призма;

$ABCD$  – р/б трапеция,

$BC = 25$  см

$AB = DC$

$AD = 9$  см

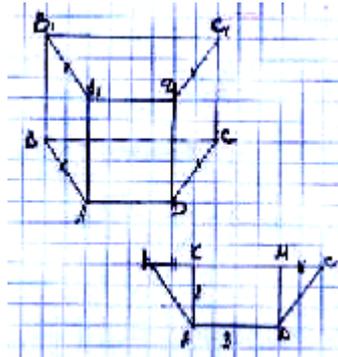
$AA_1 = 8$  см.

Найти:

$\angle BCC_1 D$  -?

$\angle BAA_1 D$  -?

Решение:



$\angle BCD$  – линейный угол двугранного  $\angle BCC_1 D$ , т.к.  $BC \perp CC_1$ ,

$DC \perp CC_1$ . Рассмотрим основание призмы  $ABCD$ , проведем высоты  $AK$  и  $DM$ ,  $BK = MC$ ,  $KM = AD = 9$  см.  $BK + MC = 25 - 9 = 16$  см,  $BK = MC = 8$  см.

$\triangle ABK = \triangle DCM$ ,  $\angle BCD = \angle CBA = 45^\circ$ ,

$\angle BAD$  – линейный двугранный  $\angle BAA_1 D$ , т.к.  $AA_1 \perp BA$ ,  $AA_1 \perp AD$ .

$\angle BAD = \angle CDA = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ .

Ответ:  $45^\circ$  и  $135^\circ$

№ 226 (б)

В правильной  $n$ -угольной призме сторона основания равна  $a$  и высота равна  $h$ .

Вычислите площади боковой и поной поверхности призмы, если:  $n = 4$ ,  $a = 12$  дм,  $h = 8$  дм.

Дано:

$n = 4$

$a = 12$  дм

$h = 8$  дм

Найти:

$S_{\text{бок}} - ?$

$S_{\text{пол}} - ?$

Решение:

$$S_{\text{бок}} = 4ah$$

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot 8 \cdot 12 = 384 \text{ (дм}^2\text{)}$$

$$S_{\text{пол}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

$$S_{\text{осн}} = a^2 = 12^2 = 144 \text{ (дм}^2\text{)}$$

$$S_{\text{пол}} = 2 \cdot 144 + 384 = 672 \text{ (дм}^2\text{)}$$

Ответ:  $384 \text{ дм}^2$ ,  $672 \text{ дм}^2$

№ 226 (в)

В правильной  $n$ -угольной призме сторона основания равна  $a$  и высота равна  $h$ . Вычислите площади боковой и поной поверхности призмы, если:  $n = 6$ ,  $a = 23$  дм,  $h = 5$  дм.

Дано:

$$n = 6$$

$$a = 23 \text{ см}$$

$$h = 5 \text{ дм} = 50 \text{ см}$$

Найти:

$$S_{\text{бок}} - ?$$

$$S_{\text{пол}} - ?$$

Ответ:  $69 \text{ дм}^2$ ,  $97 \text{ дм}^2$

Решение:

$$S_{\text{бок}} = 6ah$$

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot 50 \cdot 23 = 6900 \text{ (см}^2\text{)} = 69 \text{ (дм}^2\text{)}$$

$$S_{\text{пол}} = 3a \cdot (2h + \sqrt{3} \cdot a)$$

$$S_{\text{пол}} = 69 \cdot (100 + 23\sqrt{3}) = 69 \cdot 140 = 9660 \text{ (см}^2\text{)} = 97 \text{ (дм}^2\text{)}$$

№ 224

Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противоположащую с торону верхнего основания, если диагональ основания равна  $4\sqrt{2}$  см.

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – правильная  
четырёхугольная призма;

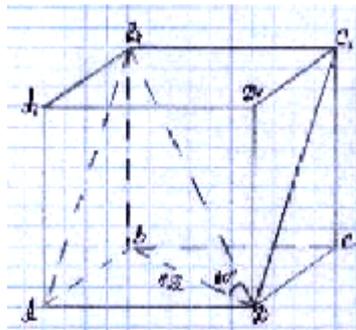
$$\angle B_1 D B = 60^\circ,$$

$$BD = 4\sqrt{2} \text{ см}$$

Найти:

$$S_{ADC_1 B_1} - ?$$

Решение:



$ADC_1 B_1$  – прямоугольник,  
( $AB \perp AD$ ,  $B_1 B \perp AD$ , по теореме о трех перпендикулярах  $AB_1 \perp AD$ ,  
следовательно  $AB_1 \perp B_1 C_1$ ).

$ABCD$  – прямоугольник:

$$AB = BD \cdot \sin 45^\circ = (4\sqrt{2} \cdot 2) / 2 = 4\sqrt{2}$$

$$AD = 4$$

$$\triangle BB_1 D: BD \cdot \tan 60^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{6}$$

$$\triangle DC_1 C: DC_1 = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{7} \text{ см.}$$

$$S_{ADC_1 B_1} = 4 \cdot 4\sqrt{7} = 16\sqrt{7} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $16\sqrt{7} \text{ см}^2$

### Практическое занятие 51.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Правильные многогранники (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр)

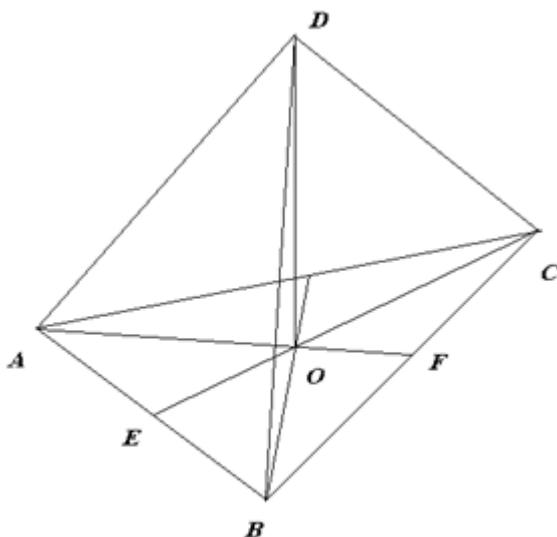
Цель занятия: Закрепление теоретических знаний, решение задач с правильными многогранниками.

Практические навыки: Развитие навыка применять знания в новых ситуациях.

Развитие творческого математического мышления, исследовательских навыков учащихся.

**Задания.**

№1. Найдите высоту правильного тетраэдра с ребром 10 см.



Дано: ABCD – правильный тетраэдр,

AB = 10 см

Найти: высоту тетраэдра

Решение.

1) AF – медиана  $\triangle ABC$ , значит  
BF = \_\_\_\_\_

2) Из  $\triangle ABF$  по теореме \_\_\_\_\_  
найдем AF

$AF^2 = AB^2 - BF^2$

AF = \_\_\_\_\_

3) O делит отрезок AF в отношении 2 : 1, поэтому AO = \_\_\_\_\_

4) Из  $\triangle ADO$  по теореме Пифагора  
найдем DO

DO = \_\_\_\_\_

DO = \_\_\_\_\_

Ответ: \_\_\_\_\_ см

№2. Решите задачу, используя план решения

Кристалл имеет форму октаэдра, состоящего из двух правильных пирамид с общим основанием, ребро основания пирамиды 6 см. Высота октаэдра 14 см. Найдите площадь боковой поверхности кристалла.

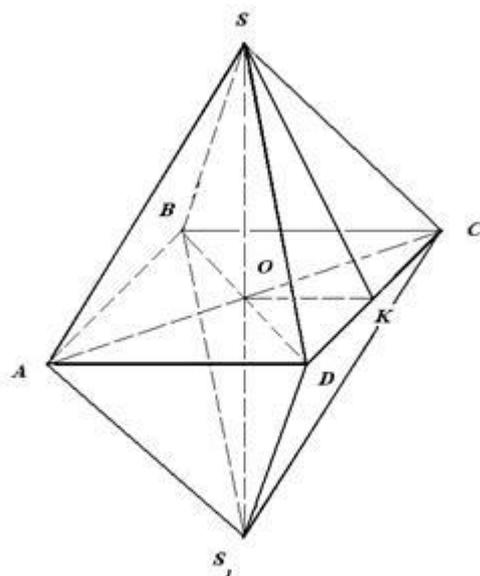


Рисунок к задаче №2

Решение.

1)  $S_{бок} = 2 S_{пир} = p \cdot SK$  (где SK – апофема, p – полупериметр ABCD)

2) Находим ОК

\_\_\_\_\_

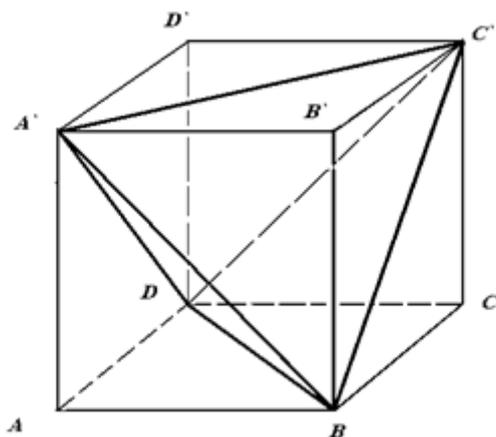
3) Находим  $SO$  \_\_\_\_\_

4) Находим  $SK$  \_\_\_\_\_

5) Вычисляем  $S_{бок}$  \_\_\_\_\_

Ответ:

№3. Докажите, что концы двух непараллельных диагоналей противоположных граней куба являются вершинами тетраэдра.



### Практическое занятие 52.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Многогранники.

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

### Практическое занятие 53.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Цилиндр. Осевое сечение цилиндра. Решение задач на нахождение элементов цилиндра.

Цель занятия: Закрепить у учащихся знания о теле вращения – цилиндре (определение, элементы цилиндра, сечение цилиндра, формулы площади боковой и полной поверхности цилиндра).

Практические навыки: Сформировать навыки решения типовых задач. Научить учащихся строить сечение цилиндра плоскостью параллельной оси цилиндра и перпендикулярной оси цилиндра.

### Практическое занятие 54.



Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Тела вращения

Цель занятия: Закрепить у учащихся знания о телах вращения. Решение задач на нахождение элементов шара и сферы, всех тел вращения, элементов конуса.

Практические навыки: Сформировать навыки решения типовых задач.

### Задания группам

Люди рабочих профессий

- Сколько квадратных метров листовой жести пойдёт на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади её боковой поверхности?
- Ведро имеет форму усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая равна 30 см. Сколько килограммов краски нужно взять для того, чтобы покрасить с обеих сторон 100 таких вёдер, если на 1 квадратный метр требуется 150 г краски? (Толщину стенок вёдер не учитывать)

Люди, посвятившие себя науке

- Один цилиндр получен вращением прямоугольника ABCD вокруг прямой AB, а другой цилиндр – вращением этого прямоугольника вокруг прямой BC. Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. Найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, если  $AB=a$ ,  $BC=b$ .
- Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9 см и 12 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3 см. Найдите площадь сферы.

Люди творческих профессий

- Спроектировать здание, состоящее из тел вращения и защитить свой проект.
- Ода телам вращения.

### Практическое занятие 55.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Объем пирамиды, усеченной пирамиды. Объем цилиндра.

Цель занятия: Закрепить у учащихся знания по теме «Объемы многогранников и тел вращения. Измерения в геометрии». Организовать систематизацию знаний учащихся и формировать умения решать задачи различными способами.

Практические навыки: Сформировать навыки решения типовых задач.

### Задания.

**Задача 1.** Классное помещение должно быть таким, чтобы на одного учащегося приходилось не менее  $6\text{ м}^3$  воздуха. Можно ли в кабинете с параметрами  $a = 8,5\text{ м}$ ,  $b = 6\text{ м}$ ,  $c = 3,6\text{ м}$  заниматься 30 учащимся, не нарушая санитарной нормы?

**Решение:**

$$V = abc \text{ или } V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V = 8,5 \cdot 6 \cdot 3,6 = 183,6(\text{м}^3)$$

$$183,6 : 30 = 6,12(\text{м}^3) \text{ воздуха приходится на одного учащегося.}$$

Да, в кабинете можно заниматься 30 учащимся.

Задача 2. Суточное выпадение осадков составило 20 мм. Сколько воды выпало за сутки на треугольную (правильный треугольник) клумбу со стороной 6м?

Решение:

Клумба представляет собой геометрическую фигуру – прямую треугольную призму, где  $h = 20\text{мм}$ , тогда  $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$

$$1) S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \approx 9 \cdot 1,7 \approx 15,3(\text{м}^2)$$

$$2) h = 20 \text{ мм}, \quad 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}, \quad 1 \text{ мм} = 0,001 \text{ м}, \quad \text{тогда } h = 0,02 \text{ м}$$

$$3) V = 15,3 \cdot 0,02 = 0,306(\text{м}^3) = 306(\text{дм}^3)$$

$$4) 1 \text{ дм}^3 = 1 \text{ л (воды)}, \quad \text{тогда } 306 \text{ дм}^3 = 306 \text{ литров воды}$$

За сутки на клумбу выпало 306 литров осадков.

### Практическое занятие 56.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Объем шара и площадь сферы.

Цель занятия: Закрепить у учащихся знания по теме « Объем шара и площадь сферы». Организовать систематизацию знаний учащихся и формировать умения решать задачи различными способами.

Практические навыки: Сформировать навыки решения типовых задач.

### Тест: «Тела вращения»

1. Сколько диаметров у сферы?

А.1. Б.2. В.3. Г. бесконечно много.

2. Какой фигурой является сечение шара плоскостью?

А. отрезком Б. окружностью В. кругом Г. сферой.

3. Пересечение дуг больших кругов шара это

А. центр сферы Б. диаметр сферы В. радиус сферы Г. большой круг.

4. Если радиус сферы увеличить в 2 раза то объем увеличится

А. в 2 раза Б. в 4 раза В. в 8 раз Г. в 16 раз.

5. В формуле  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  V-объем

А. шара Б. конуса В. цилиндра Г. шарового сектора.

6. Конус можно получить, если вращать вокруг стороны

А. равносторонний треугольник Б. тупоугольный треугольник.

В. остроугольный треугольник Г. прямоугольный треугольник.

7. Плоскость может разделить шар на

А. сегменты Б. секторы В. сферы Г. круги

8. Площадь поверхности шара (сферы) Уменьшили в 9 раз. Объем уменьшится в

А. 3 раз. Б. 9 раз В. 27 раз Г. 81 раз.

9. У цилиндра осей симметрии.

А. нет Б.1. В. 2 Г. бесконечно много.

10. У конуса плоскостей симметрии

А. нет Б.1. В. 2 Г. бесконечно много.

### Задача.

Радиус шара 8 см. Через конец радиуса, лежащего на сфере, проведена плоскость под углом  $45^\circ$  к радиусу. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью и площадь сферы.

### Практическое занятие 57.

Вид практического занятия: Урок закрепления и совершенствования знаний, умений и навыков.

Тема и содержание занятия: Площадь поверхности тел вращения

Цель занятия: Закрепить у учащихся знания по теме «Площадь поверхности тел вращения».

Практические навыки: Сформировать навыки решения типовых задач.

Задача.

Найти площадь поверхности тела вращения, полученного вращением прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$  вокруг прямой, параллельной гипотенузе и проходящей через вершину прямого угла.

Ответ: 
$$S = \frac{\pi ab}{\sqrt{a^2+b^2}} (a + b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

### Практическое занятие 58.

Вид практического занятия: Контрольная работа.

Тема и содержание занятия: Измерения в геометрии

Цель занятия: Проверка знаний, умений и навыков.

Практические навыки: Развитие умения применять полученные знания; развитие самостоятельной деятельности учащихся.

### Практическое занятие 59.

Вид практического занятия: Итоговое занятие.

Тема и содержание занятия: Повторение тем.

Цель занятия: Подвести итоги

Практические навыки: Развитие навыка применять знания в новых ситуациях.

Развитие творческого математического мышления, исследовательских навыков учащихся

## Индивидуальный проект

В рамках дисциплины обучающимся может быть выполнен Индивидуальный проект, который выполняется обучающимся самостоятельно под руководством преподавателя по выбранной теме.

### Примерные темы для индивидуальных проектов:

1. Множества действительных чисел. Практическое применение.
2. Симметрия вокруг нас.
3. Математические парадоксы и софизмы.
4. Многогранники вокруг нас (на примере пирамиды)
5. Магия чисел.

6. Математика- царица наук, арифметика –царица математики.
7. Расположение линий на плоскости и в пространстве. Практические примеры.
8. Календарь и треугольники.
9. Полуправильные многогранники.
10. Математика в нашей жизни.
11. Расположение плоскостей в пространстве. Практические примеры
12. Теория вероятности – наука о случайных явлениях.
13. Математическое моделирование сегодня.
14. Развитие научного и логического мышления в ходе изучения математики.
15. «Золотое сечение». Практическое применение.
16. Математические задачи с применением золотого сечения.

Индивидуальный проект выполняется обучающимся в течение одного года и должен быть представлен в виде завершеного учебного исследования или разработанного проекта.

**Количество часов на освоение программы: 90 часов.**

### **3. Информационное обеспечение обучения.**

#### **Перечень основной и дополнительной учебной литературы**

#### **Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы**

Основные источники:

1. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1214598>
2. Башмаков М.И. Математика / Учебник. – М.: КноРус, 2021 Режим доступа <https://www.book.ru/book/939220>
3. Муравин Г.К. Матем: алг. и нач. мат. анализа, геом. Алг. и нач. мат. анализа. 10 кл. (баз.ур.)\_М.: ООО «Дрофа»
4. Муравин Г.К. Матем: алг. и нач. мат. анализа, геом. Алг. и нач. мат. анализа. 11 кл. (баз.ур.)\_М.: ООО «Дрофа»



**Дополнительные источники:**

5. Шарьгин И.Ф. Геометрия. 10-11 кл. (базовый уровень). М.: ООО «Дрофа»
6. Сборник задач по математике: Учебное пособие/Дадаян А. А., 3-е изд. - М.: Форум, ИНФРА-М Издательский Дом, 2018 Режим доступа <http://znanium.com/catalog/product/970454>

Интернет-ресурсы:

<http://znanium.com>

<http://book.ru>